

Využitie prídavného šumu na spresnenie procesu kvantovania

Prírodný vývoj technológií v oblasti meracej techniky vedie k zvyšujúcej sa presnosti meracích systémov. Pri číslicovom meraní ovplyvňuje chyba kvantovania alebo zaokrúhľovania negatívne presnosť merania [1]. V tejto súvislosti vznikajú aj metódy umožňujúce zvyšovanie rozlišovacej schopnosti kvantizátorov. V praxi ide o analógovo-číslcové prevodníky (AČP), pri ktorých sa vhodnými metódami znižuje chyba pod úroveň najnižšieho bitu LSB (Least Significant Bit). Na potlačenie chyby kvantovania možno použiť prídavný (ditherovací) náhodný signál. Ten sa pri metóde nazývanej dithering sčíta s meraným vstupným signálom ešte pred samotným analógovo-číslcovým prevodom, aby sa vhodne ovplyvňovali štatistické vlastnosti chyby kvantovania [2].

Rozlišujeme dva základné typy ditheringu. Pod subtraktívnym ditheringom (SD) sa myslí prípad, keď je ditherovací signál odčítaný z hodnôt na výstupe AČP. V opačnom prípade ide o nesubtraktívny dithering (ND), keď okamžitú hodnotu šumu nevieme z hodnôt vzoriek odčítať a je potrebný iný spôsob spracovania zašumených údajov. SD logicky vedie k lepšiemu potlačeniu chyby kvantovania oproti ND. Navyše prináša aj ďalšie výhody využiteľné najmä v audio a video aplikáciách, súvisiace s tým, že možno zabezpečiť nezávislosť chyby kvantovania od vstupného signálu. Avšak jeho praktická implementácia je v porovnaní s ND komplikovanejšia. V meracích systémoch, kde sa nekladú až také vysoké nároky na niektoré štatistické vlastnosti chyby kvantovania, sa výhodne využíva ND. Pri meraní je podstatným parametrom presnosti efektívna hodnota chyby, ktorú budeme ďalej označovať RMSE (Root Mean Squared Error).

ND využíva na potlačenie chyby kvantovania filtráciu, ktorou sa zo vzoriek na výstupe AČP odhaduje stredná hodnota. Avšak teoretický opis tejto metódy by mal zahrňovať nielen vplyv ditherovacieho signálu na strednú hodnotu chyby kvantovania, ale aj rozptyl výsledkov digitálnej filtrácie. V literatúre sa často stretávame s uvažovaním iba strednej hodnoty chyby $E[\xi|s] = E[\varepsilon|s]$ [3]. V tomto článku si preto ukážeme, ako možno získať lepší teoretický opis, t. j. opis RMSE, na základe všeobecnej teórie kvantovania [4]. Takýto model bol uvedený v [5] pre prídavný náhodný signál s normálnym rozdelením, pridáme však výsledky aj pre ďalšie používané typy náhodných signálov.

Nesubtraktívny dithering

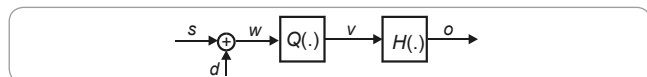
Bloková schéma systému s ND je zobrazená na obr. 1. $Q(s)$ je prevodová charakteristika ideálneho kvantizátora a $H(v)$ je prevodová charakteristika digitálneho filtra. Vstup kvantizátora w je tvorený súčtom $s + d$, kde s je meraná hodnota a d je pridaný šum. Bez šumu je výstup ideálneho AČP zaťažený iba chybou kvantovania:

$$e = Q(s) - s = Q_e(s) \quad (1)$$

$Q_e(s)$ je chybová charakteristika známa svojím pílovitým tvarom s nulovou strednou hodnotou a rozkmitom rovným kroku kvantovania q . Pokiaľ je k meranému signálu pridaný aj ditherovací šum, výstupom kvantizátora je hodnota $v = Q(w)$ zaťažená chybou:

$$\varepsilon = Q(s+d) - s = Q_e(s+d) \quad (2)$$

Prínos šumu tu nie je hneď zjavný. No vďaka pridanému náhodnému signálu bude rozkmit podmienenej (závislej od s) strednej hodnoty chyby $E[\varepsilon|s]$ menší v porovnaní s chybou e bez ditheringu.

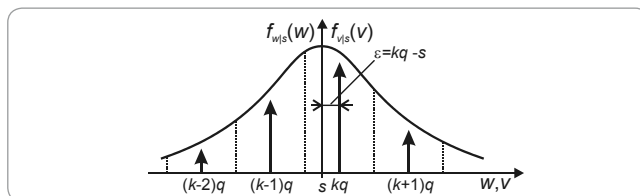


Obr. 1 Bloková schéma nesubtraktívneho ditheringu

Abý sa pomocou ND dosiahol potlačenie chyby kvantovania, treba vyhodnotiť strednú hodnotu vzoriek na výstupe kvantizátora. Avšak stredná hodnota je tu iba odhadovaná z konečného počtu N vzoriek použitím dolnopriepustného filtra $H(\cdot)$ (obr. 1). Na realizáciu filtra často stačí jednoduché spriemerovanie. Výsledok spriemerovania budeme označovať o . Chybu po spriemerovaní označíme $\xi = o - s$, pričom nie je totožná s $E[\varepsilon|s]$, keďže navyše obsahuje aj náhodnú zložku.

Teória kvantovania

Princípy všeobecnej teórie kvantovania sú opísané v [4]. Autori využívajú prístup nazývaný plošné vzorkovanie, keďže funkcie hustoty pravdepodobnosti (FHP) vstupu a výstupu kvantizátora sú navzájom spriahnuté práve cez tento špeciálny typ vzorkovania. Typický prípad je načrtnutý na obr. 2. FHP vstupu $f_{w|s}(w)$ má spojitý tvar, avšak FHP výstupu $f_{v|s}(v)$ je diskretná, pretože každá vstupná hodnota sa v procese kvantovania zaokrúhľuje smerom k najbližšej dovolenej diskretné úrovni.



Obr. 2 Plošné vzorkovanie – na výstupe kvantizátora sú možné iba celočíselné (k je celé číslo) násobky kroku kvantovania q .

Pravdepodobnosť každej diskretné úrovne na výstupe sa rovná pravdepodobnosti výskytu vstupnej hodnoty v rámci príslušného kvantovacieho rozmedzia. FHP výstupu je preto postupnosť Diracových funkcií, ktorých plochy zodpovedajú plochám pásov vstupnej FHP, vymedzeným kvantizačnými úrovňami. FHP výstupu v , ako aj FHP chyby ε môže byť preto opísaná postupnosťou Diracových impulzov. V oblasti merania vyjadrujeme vlastnosti chyby prostredníctvom štatistických momentov, ktoré možno ľahko vyhodnotiť z charakteristických funkcií FHP chyby. Charakteristická funkcia (CHF) je definovaná ako Fourierova transformácia FHP. Na analýzu vlastností chyby je preto vhodné použiť podmienenú CHF chyby (vyplývajúcu z uvedeného konceptu):

$$\Phi_{\varepsilon|s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{q}{2}(u + k\Psi)\right) \Phi_d(u + k\Psi) e^{jk\Psi s} \quad (3)$$

kde $\Psi = 2\pi/q$ a Φ_d je CHF ditherovacieho signálu. Momenty chyby $E[\varepsilon^m|s]$ získame ako podiel m -tej derivácie CHF pri argumente $u = 0$ a hodnoty j^m . Prvý moment predstavuje podmienenú strednú hodnotu $E[\varepsilon|s]$. Ak predpokladáme symetrickú FHP šumu s nulovou strednou hodnotou, CHF Φ_d ditheru je reálnou párnou funkciou; nakoniec pre prvý moment chyby dostávame:

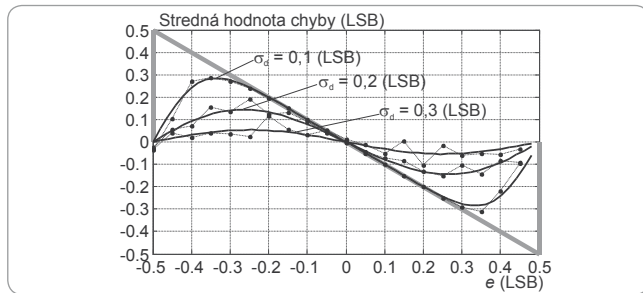
$$E[\xi|s] = E[\varepsilon|s] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q(-1)^k}{\pi k} \Phi_d(k\Psi) \sin(k\Psi s) \quad (4)$$

Iný postup teoretického vyjadrenia $E[\varepsilon|s]$ bol použitý v [3]. Tvar teoretickej $E[\varepsilon|s]$ spolu s výsledkami získanými zo simulácií pre prípad Gaussovho šumu je zobrazený na obr. 3. Ako vidno, teoretický odhad (4) (čierne krivky) síce aproximuje trend simulačných výsledkov využívajúcich spriemerovanie (bodky), avšak nezahrňuje náhodný výkyv odhadu strednej hodnoty konečného počtu (200) hodnôt. S narastajúcou smerodajnou odchýlkou šumu σ_d sa stredná hodnota v priemere znižuje, avšak rozptyl výsledkov sa zvyšuje. Navyše na vyhodnotenie jedného parametra opisujúceho celkovú presnosť meracieho zariadenia je lepšie vyjadriť strednú kvadratickú chybu (Mean Squared Error – MSE) v rámci jedného kroku kvantovania:

$$MSE_T(\infty) = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} E^2[\varepsilon|s] ds = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Phi_d^2(k\Psi) \quad (5)$$

Vzťah (5) reprezentuje strednú kvadratickú hodnotu chyby ξ pre prípad nekonečného množstva spriemerovaných hodnôt ($N = \infty$).

Inak povedané, tento parameter stále nezahrňuje rozptyl chyby ζ pri konečnej hodnote N .



Obr. 3 Závislosť strednej hodnoty chyby od veľkosti odchyľky e vstupnej hodnoty s od kvantizačnej úrovne pri rôznej veľkosti ditherovacím šume: plné čierne krivky – teória, bodky – simulácie, sivá krivka – chyba kvantovania bez ditheringu

Chyba ND so spriemerovaním

Na vyjadrenie druhého momentu chyby ζ po spriemerovaní využívajú [6] alebo [5] vzťah medzi rozptylom (Var – Variance) náhodnej premennej a rozptylom spriemerovanej náhodnej premennej. Druhý moment možno následne vypočítať pomocou rozptylu a strednej hodnoty. Nakoniec pre celkovú RMSE vyhodnotenú ako stredná hodnota z $E[\zeta^2 | s]$ platí [6]:

$$RMSE_{\zeta}^2(N) = \frac{1}{N} \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \text{Var}\{e|s\} ds + \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} E^2\{e|s\} ds = \frac{RMSE_{\zeta}^2(1)}{N} + \frac{N-1}{N} MSE_T(\infty) \quad (6)$$

V [5] bolo ukázané, že bez spriemerovania ($N = 1$) pre túto hodnotu možno písať $RMSE_T^2(1) = \sigma_d^2 + q/12$, kde σ_d je smerodajná odchyľka ditherovacieho signálu. Nakoniec je hľadaným výsledným chybovým parametrom:

$$RMSE_T^2(N) = \frac{12\sigma_d^2 + q^2}{12N} + \frac{N-1}{N} \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Phi_d^2(k\Psi) \quad (7)$$

Opísané teoretické výsledky možno aplikovať na bežné typy náhodných signálov. V tab. 1 sú uvedené charakteristické funkcie, ktoré možno jednoducho dosadiť do (7) na získanie celkovej RMSE. Potom pri niektorých typoch šumu a dostatočne veľkej smerodajnej odchyľke σ_d stačí uvažovať iba prvý člen sumy v (7), ako bolo ukázané v [5] pre Gaussovo rozdelenie. Na obr. 4 je zobrazená závislosť RMSE od σ_d pre $N = 10$ a šum s rozdelením:

- Gaussovým,
- rovnomerným,
- sínusoidálnym,
- binárnym.

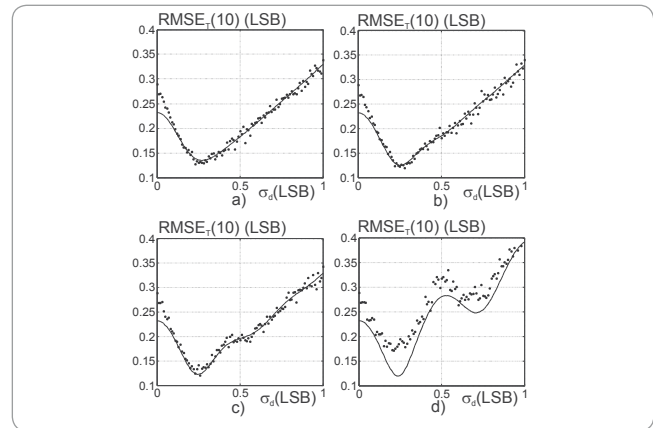
Čierne teoretické krivky sú získané pomocou (7) uvažujúc iba prvý člen sumy. Bodky reprezentujú výsledky simulácií, v ktorých bolo spracovaných 20 procesov spriemerovania (pri $N = 10$) v každej z uvažovaných 20 úrovni vstupnej hodnoty s , rovnomerne rozložených v rámci jedného kvantizačného kroku. Teoretické a simulačné výsledky si navzájom korešpondujú, iba pri binárnom náhodnom signáli vidno zreteľný posuv medzi teoretickými a simulačnými hodnotami v okolí minima RMSE v dôsledku zjednodušenia vzťahu (7). V tomto prípade by bolo potrebné uvažovať viac členov sumy v (7).

Rozd. šumu	$\Phi_d(k\Psi)$	D
Gaussove	$\exp(-2(k\sigma_d\pi/q)^2)$	∞
Rovnomerné	$\text{sinc}(kD\pi/q)$	$\sqrt{12}\sigma_d$
Trojuholn.	$\text{sinc}^2(kD\pi/(2q))$	$\sqrt{24}\sigma_d$
Sínusoidálne	Bessel-0: $J_0(kD\pi/q)$	$\sqrt{8}\sigma_d$
Binárne	$\cos(kD\pi/q)$	$2\sigma_d$
Diskrétno-3	$[1 + 2\cos(kD\pi/q)]/3$	$\sqrt{6}\sigma_d$

Tab. 1 CHF zaužívaných typov šumu (D je rozkmit šumu)

Ako možno vidieť z obr. 4, vo všetkých prípadoch použitého ditherovacieho signálu chyba s postupným pridávaním šumu najskôr klesá, dosiahne minimum a potom má rastúci trend. Je teda zrejmé, že pridaním šumu vieme zmenšiť chybu kvantovania a dokážeme tiež hľadať optimálne vlastnosti ditherovacieho signálu. Optimálny rozptyl šumu zodpovedá hodnote σ_d v minime kriviek z obr. 4. K najlepším výsledkom vedie šum s rovnomerným rozdelením.

So zvyšovaním N by sa ešte zlepšilo potlačenie chyby, avšak reakcia AČP s ND sa tým spomaľuje.



Obr. 4 Závislosť celkovej RMSE od smerodajnej odchyľky ditherovacieho šumu

Záver

V článku bol opísaný princíp nesubtraktívneho ditheringu. K tejto metóde korekcie chyby kvantovania bola prezentovaná teória vychádzajúca zo všeobecnej teórie kvantovania. Analýzy využívali znalosti charakteristických funkcií náhodných signálov a vlastností týchto funkcií. Ukázali sme postupnosť matematických krokov potrebných na vyjadrenie celkovej efektívnej hodnoty chyby spriemerovaných vzoriek. Táto chyba bola analyticky vyjadrená pre niekoľko bežných typov náhodných signálov. Teoretické výsledky boli konfrontované s výsledkami simulácií. Výsledky tiež demonštrovali pozitívny vplyv šumu pridaného k meranému signálu na vstupe analógovo-číslícového prevodníka na presnosť spriemerovaného výsledku prevodu. Pridaním šumu sa dosahuje potlačenie celkovej chyby merania a ako najvhodnejší sa ukazuje šum s rovnomerným rozdelením.

Podakovanie

Práca prezentovaná v tomto článku bola podporovaná grantom č. 2003SP200280802 a grantom VEGA č. 1/0963/12.

Literatúra

- Králiková, E. – Ravas, R. (2010). Analysis of the Influence of Quantization Error at Sensor Autocalibration. In: Proceedings of Mechatronika 2010, Jun 2 – 4, Trenčianske Teplice.
- Wannamaker, R. A. – Lipshitz, S. P. – Vanderkooy, J. – Wright, J. N. (2000). A Theory of Nonsubtractive Dither. IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 48, No. 2, (February 2000), pp. 499 – 516.
- Carbone, P. – Petri, D. (1994). Effect of Additive Dither on the Resolution of Ideal Quantizers. IEEE Trans. on Instr. and Meas., Vol. 43, No. 3 (June 1994), pp. 389 – 396.
- Widrow, B. – Kollár, I. (2008). Quantization Noise: Roundoff Error in Digital Computation, Signal Processing, Control, and Communications, Cambridge University Press. ISBN 0521886716.
- Skartlien, R. – Øyehaug, L. (2005). Quantization error and Resolution in Ensemble Averaged Data With Noise. IEEE Trans. on Instr. and Meas., Vol. 54, No. 3 (June 2005), pp. 1 303 – 1 312.
- Carbone, P. (1997). Quantitative Criteria for Design of Dither-Based Quantizing Systems. IEEE Trans. on Instr. and Meas., Vol. 46, No. 3 (June 1997), pp. 656 – 659.

Miroslav Kamenský
miroslav.kamensky@stuba.sk

Karol Kováč
karol.kovac@stuba.sk

Slovenská technická univerzita v Bratislave,
Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Ústav elektrotechniky, Ilkovičova 3, 81219 Bratislava